

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Гомотопическая топология
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Математика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	2
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составили:

Д.Г. Ильинский, канд. экон. наук

С.А. Александров

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 12.02.2024

Аннотация

Один из главных вопросов, который изучает топология - как различать геометрические объекты. В данном курсе будет дано несколько способов это сделать. Первый способ - посчитать степень “неодносвязности” объекта, или по-другому — количество “дырок” в объекте. Для этого используется техника накрытий и фундаментальных групп. Обобщение этого подхода даёт набор алгебраических инвариантов многообразия — группы гомотопий. Другая последовательность групп - групп гомологий определяется технически немного сложнее, но вычисляются они значительно проще чем гомотопические группы, и более наглядны геометрически.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- изучение основ гомотопической топологии, а также подготовка слушателей к дальнейшей самостоятельной работе в области комбинаторных задач.

Задачи дисциплины

- изучение основ гомотопической топологии;
- приобретение слушателями теоретических знаний в области комбинаторного анализа задач, возникающих на практике;
- освоение аналитического и алгебраического аппарата гомотопической топологии и получение навыков работы с основными дискретными структурами.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- основы комбинаторики и асимптотического комбинаторного анализа;
- основы теории производящих функций и приложения теории к перечислительным задачам комбинаторики;
- основы теории обращения Мёбиуса и ее приложения к перечислительным задачам комбинаторики;
- основы теории графов: планарность, изоморфизм, эйлеровость, гамильтоновость, хроматическое число, хроматический многочлен и многочлен Татта, деревья, мультиграфы, оргграфы, турниры, допустимые последовательности степеней вершин, количество связных графов с данным числом вершин и ребер (формула Кэли для числа деревьев и ее обобщения);
- основы теории гиперграфов: теоремы Эрдеша – Ко – Радо, Франкла – Уилсона и Алсведе – Хачатряна, графы пересечений и реберные графы, хроматические числа Кнезеровских графов;
- основы теории случайных графов: связность, распределение древесных компонент, эволюция гигантской компоненты, понятие случайного веб-графа;
- основы комбинаторной геометрии и ее связь с теорией графов и гиперграфов;
- основы теории кодирования и ее связь с теорией графов и гиперграфов: матрицы Адамара, коды, исправляющие ошибки, коды Хэмминга и Рида – Маллера;
- основные вероятностные методы в комбинаторике: линейность математического ожидания, метод альтернирования, метод второго момента и оценки больших уклонений;
- основные линейно-алгебраические методы в комбинаторике: линейная независимость полиномов над конечным полем;
- основные топологические методы в комбинаторике: применение теоремы Борсука – Улама – Люстерника – Шнирельмана;
- основы теории Рамсея: числа Рамсея для графов и гиперграфов, двудольные числа Рамсея, конструктивные оценки;
- основы теории систем представителей для графов и гиперграфов, включая понятие размерности Вапника – Червоненкиса и его приложения к задачам комбинаторной геометрии и математической статистики;
- основы экстремальной комбинаторики: теорема Турана и ее уточнения для дистанционных графов.

уметь:

- вычислять количества различных комбинаторных объектов: сочетаний, размещений, перестановок, циклических последовательностей;
- доказывать комбинаторные тождества;
- вычислять приближенные значения (асимптотики) комбинаторных выражений;
- составлять и решать рекуррентные соотношения;
- доказывать различные свойства графов и гиперграфов;
- решать экстремальные задачи комбинаторики;
- строить системы представителей для графов и гиперграфов;
- решать рамсеевские задачи;
- оценивать хроматические числа графов, строить многочлены Татта и хроматические многочлены;
- строить коды, исправляющие ошибки.

владеть:

- навыками самостоятельной работы;
- навыками освоения большого объема информации;
- культурой постановки и моделирования комбинаторных задач;
- вероятностным методом в комбинаторике;
- линейно-алгебраическим методом в комбинаторике;
- топологическим методом в комбинаторике;
- методом производящих функций;
- методом обращения Мёбиуса.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

		Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.
--	--	---

№	Тема (раздел) дисциплины	Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Гомотопии	6	6		15
2	Накрытия, гомотопическая эквивалентность	6	6		15
3	Гомотопические группы	6	6		15
4	Неретрагируемость диска на сферу	6	6		15
5	Цепные комплексы	6	6		15
Итого часов		30	30		75
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 4 (Весенний)

1. Гомотопии

Гомотопии, фундаментальная группа, основная теорема алгебры.

2. Накрытия, гомотопическая эквивалентность

Метрические и топологические пространства, симплициальные комплексы.

3. Гомотопические группы

Гомотопические группы, точная последовательность расслоения.

4. Неретрагируемость диска на сферу

Неретрагируемость диска на сферу, теорема Брауэра о неподвижной точке, симплициальные гомологии, их топологическая и гомотопическая инвариантности.

5. Цепные комплексы

Цепные комплексы, последовательность Майера — Вьеториса, Когомологии, двойственность Пуанкаре.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Алгебраическая топология с геометрической точки зрения [Текст] / А. Б. Скопенков - М.МЦНМО,2015
2. Топология для физиков [Текст] : уч. пособие для вузов / Ю. А. Бычков ; Гос. ком. РФ по высш. образов., Моск. физико-техн. ин-т .— М. : Изд-во МФТИ, 1993 .— 108 с.

Дополнительная литература

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Не предусмотрено.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Прикладная математика и информатика
профиль подготовки: Математика
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
кафедра дискретной математики
курс: 2
квалификация: бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Дифференцированный зачет

Разработчики:

Д.Г. Ильинский, канд. экон. наук
С.А. Александров

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Гомотопическая топология» обучающийся должен:

знать:

- основы комбинаторики и асимптотического комбинаторного анализа;
- основы теории производящих функций и приложения теории к перечислительным задачам комбинаторики;
- основы теории обращения Мёбиуса и ее приложения к перечислительным задачам комбинаторики;
- основы теории графов: планарность, изоморфизм, эйлеровость, гамильтоновость, хроматическое число, хроматический многочлен и многочлен Татта, деревья, мультиграфы, орграфы, турниры, допустимые последовательности степеней вершин, количество связных графов с данным числом вершин и ребер (формула Кэли для числа деревьев и ее обобщения);
- основы теории гиперграфов: теоремы Эрдеша – Ко – Радо, Франкла – Уилсона и Алсведе – Хачатряна, графы пересечений и реберные графы, хроматические числа Кнезеровских графов;
- основы теории случайных графов: связность, распределение древесных компонент, эволюция гигантской компоненты, понятие случайного веб-графа;
- основы комбинаторной геометрии и ее связь с теорией графов и гиперграфов;
- основы теории кодирования и ее связь с теорией графов и гиперграфов: матрицы Адамара, коды, исправляющие ошибки, коды Хэмминга и Рида – Маллера;
- основные вероятностные методы в комбинаторике: линейность математического ожидания, метод альтернирования, метод второго момента и оценки больших отклонений;
- основные линейно-алгебраические методы в комбинаторике: линейная независимость полиномов над конечным полем;
- основные топологические методы в комбинаторике: применение теоремы Борсука – Улама – Люстерника – Шнирельмана;
- основы теории Рамсея: числа Рамсея для графов и гиперграфов, двудольные числа Рамсея, конструктивные оценки;
- основы теории систем представителей для графов и гиперграфов, включая понятие размерности Вапника – Червоненкиса и его приложения к задачам комбинаторной геометрии и математической статистики;
- основы экстремальной комбинаторики: теорема Турана и ее уточнения для дистанционных графов.

уметь:

- вычислять количества различных комбинаторных объектов: сочетаний, размещений, перестановок, циклических последовательностей;
- доказывать комбинаторные тождества;
- вычислять приближенные значения (асимптотики) комбинаторных выражений;
- составлять и решать рекуррентные соотношения;
- доказывать различные свойства графов и гиперграфов;
- решать экстремальные задачи комбинаторики;
- строить системы представителей для графов и гиперграфов;
- решать рамсеевские задачи;
- оценивать хроматические числа графов, строить многочлены Татта и хроматические многочлены;
- строить коды, исправляющие ошибки.

владеть:

- навыками самостоятельной работы;
- навыками освоения большого объёма информации;
- культурой постановки и моделирования комбинаторных задач;
- вероятностным методом в комбинаторике;
- линейно-алгебраическим методом в комбинаторике;
- топологическим методом в комбинаторике;
- методом производящих функций;
- методом обращения Мёбиуса.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Вопросы и задачи для текущего контроля:

1. Найдите фундаментальную группу прямой.
2. Докажите основную теорему алгебры.
3. Докажите, что фундаментальная группа топологической группы абелева.
4. Докажите, что любой связный граф гомотопически эквивалентен букету некоторого числа окружностей.
5. Найдите фундаментальную группу полнотория.
6. Докажите, что в свободной группе с двумя образующими содержится свободная группа с произвольным конечным числом образующих как подгруппа конечного индекса. Найдите индекс этой подгруппы.
7. Докажите, что фундаментальная группа сферы большой размерности тривиальна.
8. Докажите, что гомотопическая группа всегда является абелевой.
9. Докажите теорему Брауэра о неподвижной точке.
10. Вычислите гомологии проективной плоскости.
11. Вычислите гомологии дополнения узла в трёхмерной сфере.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Вопросы для зачёта:

1. Найдите фундаментальную группу окружности.
2. Докажите теорему о существовании универсального накрытия.
3. Докажите теорему о симплициальной аппроксимации.
4. Докажите теорему о точной последовательности расслоения. Приведите пример применения этой теоремы.
5. Докажите, что диск не ретрагируется на сферу.
6. Докажите, гомотопическую инвариантность симплициальных гомологий. Покажите, как из этого следует, что евклидовы пространства различных размерностей не гомеоморфны.
7. Докажите теорему Майера — Вьеториса.
8. Докажите, что имеет место двойственность Пуанкаре.
9. Теорема Гуревича. Связь между гомотопическими группами и гомологическими группами пространства.
10. Приложения гомотопической топологии в других областях математики и физики.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений

- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.